

Algebralliset rakenteet I  
Kurssikoe  
08.03.2017

*Kaikki vastaukset tulee perustella huolellisesti.*

1. Olkoon  $X = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  kaikkien funktioiden joukko reaaliluvuilta itselleen. Määritellään tähän joukkoon laskutoimitus  $\oplus$  seuraavasti:  $f \oplus g = h$ , missä  $h(x) = f(x) + g(x)$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$  ja  $+$  on tavallinen reaalilukujen yhteenlasku.
  - (a) Osoita, että  $(X, \oplus)$  on ryhmä.
  - (b) Osoita että  $Y = \{f \in X \mid f(0) = 0\} \subset X$  on aliryhmä.
2. Olkoon  $A = \{a, b, c\}$  ja olkoon  $\star$  joukossa  $A$  määritelty laskutoimitus siten että  $(A, \star)$  on ryhmä, jonka neutraalialkio on  $a$ . Osoita, että  $A$  on syklinen ryhmä.
3.
  - (a) Osoita, että jos  $[m]_7 = [n]_7$ , niin  $[3m]_7 = [3n]_7$  kaikilla  $n, m \in \mathbb{Z}$ .
  - (b) Olkoon  $f: \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$  määritelty kaavalla  $f([n]_7) = [3n]_7$ . Osoita, että  $f$  on isomorfismi ryhmästä  $(\mathbb{Z}_7, +)$  itselleen, eli automorfismi.
4. Ratkaise ryhmässä  $S_4$  yhtälö  $(23)x^{-1}(124) = (34)^4$ . Kirjoita vastaus sievennetyssä muodossa.