

$$(25)(45) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 1 & 5 \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

3

$$(24)(25) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ & 1 & 3 & 2 & 4 \\ & & & & \end{pmatrix} = (254)$$

Algebralliset rakenteet I

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Yleistentti, tentin kesto aika 3.5 tuntia

18.05.2016

Laskimen tai taulukkokirjan käyttö ei ole sallittua.

$$(254)(245) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & & \end{pmatrix} = (1)$$

1. Olkoon  $H = \{(1), (254), (245)\}$ .

a) Osoita, että  $H$  on ryhmän  $S_5$  aliryhmä.

b) Osoita, että  $H = \langle (245) \rangle$ .

2. a) Miten kuuluu Lagrangen lause?

b) Määritä aliryhmän  $\{(1), (24)\}$  sivuluokat ryhmässä  $G = \{(1), (24), (25), (45), (254), (245)\}$ .

3. a) Olkoon  $G$  vaihdannainen ryhmä, jolla on aliryhmät  $H$  ja  $K$ . Osoita, että aliryhmien tulo  $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$  on  $G$ :n aliryhmä.

b) Anna esimerkki ryhmästä  $G$  ja sen aliryhmistä  $H$  ja  $K$ , joiden tulo  $HK$  ei ole aliryhmä.

4. Tarkastellaan ryhmää  $S_{\mathbb{R}} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on kääntyvä}\}$ , jonka laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen. Osoita, että joukko

$$H = \{f \in S_{\mathbb{R}} \mid f(3) = 3\}$$

on ryhmän  $S_{\mathbb{R}}$  aliryhmä.

5. Olkoon  $G$  syklinen ryhmä ja  $f: G \rightarrow H$  ryhmähomomorfismi. Osoita, että kuvajoukko  $f(G)$  on syklinen ryhmä.