

Algebralliset rakenteet I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe
04.03.2015

Koeaika on kolme tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa.

1. Määritellään joukossa \mathbb{Z}_4 laskutoimitus $*$ ehdolla $[a]_4 * [b]_4 = [3ab]_4$.
 - (a) Osoita, että laskutoimitus $*$ on liitännäinen.
 - (b) Onko laskutoimituksella neutraalialkiota?

2. (a) Tutkitaan ryhmää S_6 . Määritä tulo $(135)(24) \cdot (13)(25)$, ja määritä myös alkion $(124)(563)$ käänteisalkio.
 - (b) Määrittele seuraavat käsitteet: virittäminen, syklinen ryhmä, aliryhmän määräämä sivuluokka.

3. Ryhmällä $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ on aliryhmä $H = \{7^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ja ryhmällä $(\mathbb{Z}, +)$ on aliryhmä $3\mathbb{Z} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
 - (a) Osoita, että ryhmät H ja $7\mathbb{Z}$ ovat isomorfiset.
 - (b) Ovatko ryhmät $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ja $(\mathbb{Z}, +)$ syklisiä? Entä aliryhmät H ja $7\mathbb{Z}$?

4. (a) Onko ryhmällä S_5 aliryhmää, jonka kertaluku on seitsemän?
 - (b) Ryhmällä \mathbb{Z}_{12} on aliryhmä $H = \{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}$. Mitä Lagrangen lause kertoo aliryhmän H indeksistä eli (vasempien) sivuluokkien lukumäärästä? Määritä sivuluokat.