Institutionen för matematik och statistik
Algebraiska strukturer II
Kursprov 11.5.2018 (längd 2 h 30 min)

1. Vi undersöker ringen $R = \{a, b, c, d\}$, som har följande tabeller för räkneoperationerna:

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	a	c
d	a	d	c	b

a) Vilket är enhetselementet i ringen R?

b) Är ringen R en kropp?

c) Lös ekvationen $x^2 - 3x + 1 = 0$ i ringen R.

2. a) Finns det en homomorfism $f\colon (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}, +)$, för vilken $f(1) = 1$?

b) Finns det en homomorfism $g\colon (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, för vilken $g(1) = 1$?

c) Anta att $h\colon G \to G'$ är en homomorfism mellan grupper. Visa: om gruppen G är cyklisk, så är också bildmängden $\mathrm{Im}h$ cyklisk.

3. Vi betraktar kvadratens symmetrigrupp D_4, vars multiplikationstabell för räkneoperationen finns på motstående sida av detta papper. Vi antar det känt att $N = \{E, K_{180}\}$ är en normal undergrupp till gruppen D_4.

a) Bestäm elementen i faktorgruppen D_4/N.

b) Hur ser multiplikationstabellen ut för faktorgruppen D_4/N?

c) Vilka är ordningarna hos elementen i faktorgruppen?

4. a) Är polynomet $X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}_3[X]$ irreducibelt? Om det inte är det, så skriv polynomet som en produkt av irreducibla polynom.

b) Är polynomet $X^3 + X^2 - X - 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$ irreducibelt? Om det inte är det, så skriv polynomet som en produkt av irreducibla polynom.

⟶

	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°	P_1	P_2	P_3	P_4
E	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°	P_1	P_2	P_3	P_4
K_{90°	K_{90°	K_{180°	K_{270°	E	P_4	P_1	P_2	P_3
K_{180°	K_{180°	K_{270°	E	K_{90°	P_3	P_4	P_1	P_2
K_{270°	K_{270°	E	K_{90°	K_{180°	P_2	P_3	P_4	P_1
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4	E	K_{90°	K_{180°	K_{270°
P_2	P_2	P_3	P_4	P_1	K_{270°	E	K_{90°	K_{180°
P_3	P_3	P_4	P_1	P_2	K_{180°	K_{270°	E	K_{90°
P_4	P_4	P_1	P_2	P_3	K_{90°	K_{180°	K_{270°	E