

Algebra I

Helsingfors universitet, Institutionen för matematik och statistik

Kursförhör 2

7.5.2014

Räknare och tabller är inte tillåtna i provet.

1. (12 poäng) Vi granskar funktionen $f: 3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_7$, $f(a) = [a/3]_7$.

(a) Visa att f är en homomorfism.

(b) Nedan finns ett försök att bevisa att kärnan till funktionen f är $21\mathbb{Z}$. Beviset är emellertid inte riktigt. Förklara kort vad som är fel och korrigera sedan beviset.

”Antag att $a \in 21\mathbb{Z}$. Nu är $a = 21k$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Vi ser att

$$f(a) = f(21k) = [7k]_7 = [0]_7.$$

Således $\text{Ker } f = 21\mathbb{Z}$.”

(c) En hurudan isomorfism får man av homomorfismen f enligt homomorfismsatsen för grupper? Vilket element avbildas på elementet $[2]_7$ av isomorfismen ifråga?

2. (12 poäng) Vi vet om gruppen H att det är en undergrupp till $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ och att den har två element.

(a) Hur många sidoklasser har H ?

(b) Rita en bild av mängden av sidoklasser $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$. Välj själv det illustreringsätt du bäst tycker beskriver mängden.

(c) Antag att en av H 's sidoklasser är $\{([1]_2, [1]_4), ([1]_2, [3]_4)\}$. Bestäm de övriga sidoklasserna.

3. (6 poäng) Vi granskar ringen $R = \{a, b, c, d\}$ som har följande räkneoperationstabeller:

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|---------|-----|-----|-----|-----|
| $+$ | a | b | c | d | \cdot | a | b | c | d |
| a | a | b | c | d | a | a | a | a | a |
| b | b | c | d | a | b | a | b | c | d |
| c | c | d | a | b | c | a | c | a | c |
| d | d | a | b | c | d | a | d | c | b |

(a) Vilken är ringens enhet (ykkösalkio)?

(b) Är d ett enhetselement (yksikkö)?

(c) Är R ett heltalsområde?

4. (6 poäng)

(a) Vad är graden av polynomet $18X^7 + 13X^4 - 3X$ i ringen $\mathbb{Z}_6[X]$?

(b) Låt R vara ringen i uppgift 3 och $P = X^2 - 3X + 2$ ett polynom i ringen $R[X]$. Bestäm rötterna till P .

5. (12 poäng)

(a) Vad har kvotgrupper och normala undergruppen med varandra att göra?

(b) Antag att G är en cyklisk grupp med en normal undergrupp N . Visa att kvotgruppen G/N är cyklisk.

Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

2. kurssikoe

7.5.2014

Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa.

1. (12 pistettä) Tutkitaan kuvausta $f: 3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_7, f(a) = [a/3]_7$.

(a) Osoita, että f on homomorfismi.

(b) Seuraavassa on yritetty osoittaa, että kuvauksen f ydin on $21\mathbb{Z}$. Todistus ei kuitenkaan ole pätevä. Selitä lyhyesti, mikä todistuksessa on vialla, ja korjaa sen jälkeen todistus.

"Oletetaan, että $a \in 21\mathbb{Z}$. Nyt $a = 21k$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$. Huomataan, että

$$f(a) = f(21k) = [7k]_7 = [0]_7.$$

Siten $\text{Ker } f = 21\mathbb{Z}$."

(c) Millainen isomorfismi homomorfismista f saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla? Mikä alkio kuvautuu kyseisessä isomorfismissa alkioille $[2]_7$?

2. (12 pistettä) Ryhmän $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ aliryhmästä H tiedetään, että siinä on kaksi alkioita.

(a) Kuinka monta sivuluokkaa H :lla on?

(b) Piirrä kuva sivuluokkien joukosta $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$. Voit itse valita havainnollistustavan, joka kuvaa mielestäsi parhaalla tavalla joukon rakennetta.

(c) Oletetaan, että eräs H :n sivuluokista on $\{([1]_2, [1]_4), ([1]_2, [3]_4)\}$. Määritä muut H :n sivuluokat.

3. (6 pistettä) Tutkitaan rengasta $R = \{a, b, c, d\}$, jolla on oheiset laskutoimitustaulut:

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|---------|-----|-----|-----|-----|
| $+$ | a | b | c | d | \cdot | a | b | c | d |
| a | a | b | c | d | a | a | a | a | a |
| b | b | c | d | a | b | a | b | c | d |
| c | c | d | a | b | c | a | c | a | c |
| d | d | a | b | c | d | a | d | c | b |

(a) Mikä on renkaan R ykkösalkio?

(b) Onko alkio d yksikkö?

(c) Onko R kokonaisalue?

4. (6 pistettä)

(a) Mikä on renkaan $\mathbb{Z}_6[X]$ polynomien $18X^7 + 13X^4 - 3X$ aste?

(b) Olkoon R tehtävässä 3 käsitelty rengas. Määritä renkaan $R[X]$ polynomien $X^2 - 3X + 2$ juuret.

5. (12 pistettä)

(a) Miten tekijäryhmät ja normaalit aliryhmät liittyvät toisiinsa?

(b) Oletetaan, että G on syklinen ryhmä, jolla on normaali aliryhmä N . Osoita, että tekijäryhmä G/N on syklinen.