

Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

1. kurssikoe

26.2.2014

Koeaika on kolme tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa.

1. (a) Mitkä seuraavista laskuista on laskettu oikein?

$$[3]_8 + [7]_8 = [5]_8 \quad [-2]_4 + [3]_4 = [-7]_4 \quad -[4]_5 = [6]_5$$

Perustele vastauksesi.

- (b) Määritellään rationaalilukujen joukossa laskutoimitus $*$ ehdolla

$$a * b = a - 10 + b.$$

Osoita, että laskutoimituksella on neutraalialkio. Onko luvulla 2 käänteisalkiota laskutoimituksen $*$ suhteen?

2. (a) Miten määritellään ryhmäisomorfismi?

(b) Jos ryhmien välillä on isomorfismi, ryhmät ovat rakenteeltaan samanaikaiset. Isomorfismin määritelmässä ei kuitenkaan suoranaisesti sanota mitään tällaista. Selitä lyhyesti omin sanoin, miksi isomorfismin määritelmästä seuraa, että isomorfisten ryhmien algebralliset ominaisuudet ovat samanlaiset.

(c) Ryhmällä $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ on aliryhmä $H = \{20^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Osoita isomorfisuuden määritelmän perusteella, että ryhmä $(\mathbb{Z}, +)$ on isomorfinen ryhmän (H, \cdot) kanssa.

3. (a) Määritä ryhmän S_6 alkion $(425)(136)$ virittämä aliryhmä $\langle (425)(136) \rangle$. Mikä on alkion $(425)(136)$ kertaluku? Perustele vastauksesi huolellisesti.

(b) Anna esimerkki syklistä ryhmästä, joka on ääretön. Mikä on keksimäsi ryhmän virittäjä?

4. (a) Olkoon G vaihdannainen ryhmä, jolla on aliryhmät H ja K . Osoita, että aliryhmien tulo $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ on ryhmän G aliryhmä.

(b) Anna esimerkki ryhmästä G ja sen aliryhmistä H ja K , joiden tulo HK ei G :n ole aliryhmä.