

Relativitetsteorins grunder 2022 – Tentamen

Onsdag 11 maj 2022 kl. 10:00–14:00

Viktig information! Läs detta först:

- Denna tentamen har fem frågor. Varje fråga är värd 6 poäng. Som mest kan man alltså få 30 poäng totalt.
- Ni har fyra timmar på er att besvara frågorna.
- Som vanligt måste ni härleda ekvationer och förklara era uträkningar med utgångspunkt från det vi gått igenom i kursen.
- Skriv namn på varje löst papper.
- Ni får använda en miniräknare (ej något med en internetanslutning som t.ex. en mobil).
- Ni får ha med er en dubbelsidig A4 med valfria anteckningar.
- På sista sidan finns en formelsamling med några viktiga ekvationer.
- Om ni har frågor, tveka inte att fråga!

Lycka till!

1. Blandade frågor - speciell relativitet

- Ett rymdskepp startar, färdas 0,5 ljusår med hastigheten $\frac{8}{10}c$, och stannar. Vad är rumtidsintervallet för färden?
- Ett objekt har längden 4 m i sitt vilosystem. Hur långt är det enligt en observatör som rör sig med hastigheten $0,5c$?
- Vad är en **ljuskon**? Varför är ljuskoner viktiga inom speciell relativitet?
- En partikel har energin 5 GeV och den totala rörelsemängden $2 \text{ GeV}/c$, i ett visst koordinatsystem. Vad är partikelns massa i dess vilosystem?
- Om du har en 4-vektor A , hur kan du bilda något invariant från den?
- Vad är den "vanliga" hastigheten $v_x = dx/dt$ för ett föremål med följande 4-hastighet:

$$a \frac{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} \sqrt{1 + \frac{v_x^2}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{v_x^2}{c^2}}}$$

$$U = c \begin{pmatrix} \sqrt{19} \\ 3\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{v_x^2}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{v_x^2}{c^2}}}$$

1

$$a \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} = v_x$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2. Blandade frågor - allmän relativitet och kosmologi

- Innan allmän relativitet formulerades var Newtons gravitationslag den bästa teorin för gravitation. Varför är denna lag problematisk med tanke på det vi lärt oss om speciell relativitetsteori?
- Nämn och förklara kort ett fenomen som är en konsekvens av (den starka) ekvivalensprincipen och tankeexperimentet "Einsteins hiss".
- Vad menas med "återkombination" inom kosmologi, och vad har det att göra med den kosmiska bakgrundsstrålningen?
- Vi diskuterade tre olika former av energi inom kosmologi: vanlig materia, strålning, och mörk energi. Vilken av dessa var viktigast ("dominerade") i det tidiga universum? Varför?

3. Två fysiker och en pulsar

Pulsarer är en typ av stjärnor som avger pulser med ljus med *regelbundna* intervall. Två fysiker, Alice och Bob, observerar en sån pulsar. Men medan Bob står stilla jämfört med pulsaren så rör sig Alice: Hon börjar på samma plats som Bob, färdas först med hastigheten $v = \frac{8}{10}c$ mot pulsaren i 10 år (hon når inte fram till den), och slutligen med samma hastighet tillbaka till Bob. När hon återvänder har hon alltså upplevt att 20 år har gått.

- Hur länge upplever Bob att Alices resa tog?
- Rita ett *stort och tydligt* rumtidsdiagram över händelseförloppet, inklusive Alice, Bob och pulsaren.
- Rita ut några av ljuspulserna som Alice och Bob ser på ditt rumtidsdiagram (du kan rita ett nytt diagram om det är enklare). Förklara med hjälp av diagrammet varför Alice och Bob ser *samma* totala antal pulser under händelseförloppet.
Ser Alice lika många pulser på vägen mot stjärnan som på tillbakavägen?
- Glöm nu bort pulsaren, och tänk er istället att Bob skickar bilder på sig själv till Alice med regelbundna intervall under hennes resa. Alice kan på det sättet se hur Bob åldras. Rita ett nytt rumtidsdiagram som visar dessa bilder, som skickas till Alice som ljuspulser. Ser Bob ut att åldras snabbare på Alices väg mot stjärnan eller på tillbakavägen?

4. Att skapa ett par partiklar

En kollision mellan en foton (en masslös ljuspartikel) och en elektron kan resultera i att ytterligare en elektron samt en positron bildas. En positron har samma massa som en elektron, $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$ (keV=kilo-elektronvolt). Processen i fråga är alltså

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$$

där γ symboliserar en foton, e^- en elektron och e^+ en positron.

Använd ett koordinatsystem där den *totala* rörelsemängden (före och efter kollisionen) är noll.

Vad är den **minsta energi** fotonen behöver ha i detta koordinatsystem för att denna process ska vara möjlig?

Tips: Vilken hastighet bör tre partiklar efter kollisionen ha (i detta koordinatsystem) för att minimera energin som krävs för att skapa dem?

5. En expanderande sfär

I vår diskussion om allmän relativitetsteori studerade vi ett enkelt exempel på en krökt rumtid: Ytan på en sfär med konstant radie R . Vi visade att linjeelementet som beskriver denna sfär är

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 d\theta^2 - R^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1)$$

där θ och ϕ är de vanliga sfäriska vinkelkoordinaterna. Om vi gör en liten ändring kan det här beskriva ett sorts expanderande universum: vi låter radien bero av tiden, $R = R(t)$.

Tänk er nu att två varelser lever på den expanderande sfärens yta. De står stilla på samma ϕ -koordinat, men på olika θ -koordinater, θ_1 och θ_2 .

- (a) Använd linjeelementet (1) för att visa att avståndet mellan de två varelserna vid en viss tidpunkt är $d = \Delta\theta R(t)$, där $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.
- (b) Härled motsvarigheten till Hubbles lag för dessa sfärvarelser, alltså en ekvation som relaterar avståndet d och hastigheten $v = \dot{d}$ (\dot{d} är alltså t -derivatan av d). Vad är Hubbleparametern som funktion av $R(t)$?
- (c) Antag att hastigheten v är *konstant* i tiden, och att skalfaktorn är 0 vid tiden $t = 0$. Vad är då Hubbleparametern som funktion av tiden?
- (d) Om v är konstant och vi kan mäta Hubbleparametern i nutid, hur kan vi beräkna hur gammalt universum är?

Formelsamling

Ljusets hastighet $c \approx 3 \times 10^8$ m/s.

Lorentzfaktorn: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ (2)

Tidsdilatation: $\Delta t' = \gamma \Delta t$ (3)

Längdkontraktion: $L' = \frac{L}{\gamma}$ (4)

Dopplereffekten för ljus: $f_o = \sqrt{\frac{1 \pm u/c}{1 \mp u/c}} f_K$ (5)

{ övre tecknen: K & O rör sig mot varandra
 { undre tecknen: K & O rör sig från varandra

Lorentztransformationen:
$$\begin{cases} t' = \gamma (t - \frac{u}{c^2} x) \\ x' = \gamma (x - u t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$
 (6)

Transformation av hastigheter:
$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - u v_x / c^2} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma (1 - u v_x / c^2)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma (1 - u v_x / c^2)} \end{cases}$$
 (7)

Transformation av en 4-vektor: $a' = \Lambda a$ med $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{u}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{u}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (8)

Rumtidsintervallet: $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ (9)

4-rörelsemängd: $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ med $\begin{cases} E = \gamma m c^2 \\ p_x = \gamma m v_x \\ p_y = \gamma m v_y \\ p_z = \gamma m v_z \end{cases}$ (10)

Mer om energi och rörelsemängd: $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ och $|\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|}{E} c^2$ (11)

(12)