

# Relativitetsteorins grunder 2019 – Tentamen

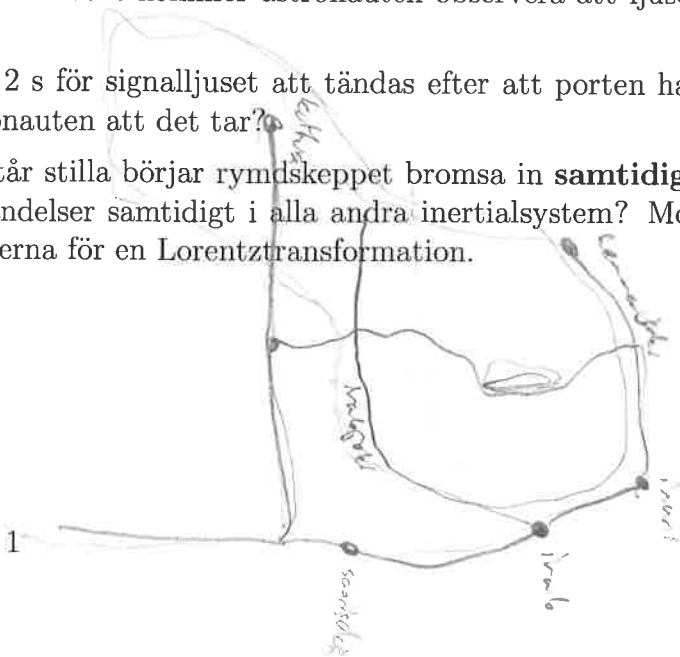
10 maj 2019 kl. 10–14 i Physicum D114

**Viktig information!** Läs detta först:

- Denna tentamen har sju frågor. **Välj ut och svara på endast fem (5) av dessa!** Var tydliga med vilka fem frågor du väljer att besvara — om det inte är tydligt kommer de frågor med högst poäng att strykas tills fem återstår!
- Varje fråga är värd 6 poäng. Som mest kan man alltså få 30 poäng totalt.
- Ni har fyra timmar på er att besvara frågorna (48 minuter per fråga).
- Skriv namn, studentnummer, kursnamn (RG) samt datum (10.5.2019) på varje löst papper.
- Ni får använda en miniräknare (ej något med en internetanslutning som t.ex. en mobil).
- Ni får ha med er en handskriven dubbelsidig A4 med valfria anteckningar.
- På sista sidan (sida 4) finns en formelsamling med några viktiga ekvationer.

**Lycka till!**

- 
1. En astronaut är på väg mot en rymdstation för att parkera sitt rymdskepp i stationens hangar. Skeppet, vars egenlängd är 75 m, rör sig med hastigheten  $0,8c$  jämfört med hangaren.
- (a) I ett koordinatsystem där rymdskeppet står stilla uppmäter astronauten att hangaren är 48 m lång. Vad är hangarens egenlängd? Kan rymdskeppet få plats i hangaren när det står stilla jämfört med hangaren?
  - (b) Vid hangarens port finns ett signalljus som lyser grönt (frekvens  $\approx 550 \times 10^{12}$  Hz) om porten till hangaren är öppen. Vilken frekvens kommer astronauten observera att ljuset har?
  - (c) Enligt personerna i hangaren tar det 2 s för signalljuset att tändas efter att porten har öppnats. Hur lång tid uppmäter astronauten att det tar?
  - (d) I ett koordinatsystem där hangaren står stilla börjar rymdskeppet bromsa in **samtidigt** som signalljuset tänds. Sker dessa händelser samtidigt i alla andra inertialsystem? Motivera ditt svar med hjälp av ekvationerna för en Lorentztransformation.



2. Svara **kort** på följande frågor.

- (a) Vilka är de **två postulat** som ligger till grund för den speciella relativitetsteorin?
- (b) Vad menas med **egentiden** längs en världslinje?
- (c) Ge **en anledning** till att inget kan färdas snabbare än  $c$  enligt speciell relativitetsteori.
- (d) Hur snabbt färdas en **masslös** partikel?
- (e) Varför är ett svart håls **händelsehorisont** en speciell plats?
- (f) Hur kan vi observera att universum **expanderar**?

3. En fysiker använder ett visst koordinatsystem och uppmäter följande två 4-vektorer:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_t \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ 3\sqrt{2}c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_t \\ b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ \sqrt{15} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) 4-vektorn  $\mathbf{a}$  är ett rymdskepps 4-hastighet. Vad är 4-hastighetens  $t$ -komponent  $a_t$ ? (Komponenten bör vara **positiv**.)
  - (b) Vad är  $x$ -komponenten av rymdskeppets "vanliga" hastighet  $v_x = dx/dt$  i detta koordinatsystem?
  - (c) 4-vektorn  $\mathbf{b}$  är en partikels 4-rörelsemängd. Komponenterna har enheten MeV/ $c$ , alltså t.ex.  $b_t = 8$  MeV/ $c$ . Vad är partikelns massa och hastighet?
  - (d) Vad är partikelns energi i ett koordinatsystem där rymdskeppet står stilla?
4. Den galaktiska polisen utreder ett brott. Något slags vapen har använts för att förstöra en fredlig himlakropp. Förstörelsen ägde rum vid koordinaterna

$$F: (ct, x, y, z) = (5, -1, 0, 15) \text{ ljusår.}$$

Tre misstänkta kan snabbt identifieras, vid namn Alice, Bob och Charlie (A, B och C). De misstänkta — galna vetenskapsmän allihopa — har alla observerats avfyra avancerade vapen i sina laboratorier runtom i galaxen. Dessa misstänkta observationer ägde rum vid följande koordinater:

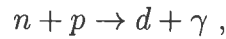
$$A: (ct, x, y, z) = (-14, 7, 8, -1) \text{ ljusår.}$$

$$B: (ct, x, y, z) = (3, -2, 0, 15) \text{ ljusår.}$$

$$C: (ct, x, y, z) = (-2, -1, 0, 10) \text{ ljusår.}$$

- (a) Rita ett rumtidsdiagram som visar alla fyra händelsers  $x$ - och  $ct$ -koordinater. Rita också in ljuskonen för den första händelsen (förstörelsen av asteroiden).
- (b) Beräkna de **tre** rumtidsintervallen mellan förstörelsen F och de misstänkta observationerna A, B, och C. Är intervallen tids-, rums- eller ljuslika?
- (c) Vilken av händelserna A, B, C kan **inte** ha orsakat förstörelsen? Förklara varför.
- (d) Lite senare får polisen ytterligare information: Ingen av de misstänkta har haft tillgång till vapen eller annan utrustning som kan färdas snabbare än  $0,6c$ . Vilken av de tre observationerna **kan** ha orsakat förstörelsen?

5. En neutron ( $m_n = 940 \text{ MeV}/c^2$ ) vars totala energi är 2210 MeV rör sig längs den positiva  $x$ -riktningen. Den kolliderar med en proton ( $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ ) som rör sig i den negativa  $x$ -riktningen med hastigheten  $0,97c$ . De två partiklarna bildar en deuteriumkärna och avger en foton. Detta kan skrivas som



där  $\gamma$  symboliserar fotonen (inte Lorentzfaktorn).

- Vad är neutronens 4-rörelsemängdsvektor före kollisionen?
  - Vad är protonens 4-rörelsemängdsvektor före kollisionen?
  - Efter kollisionen uppmäts fotonens energi till ungefär 1940 MeV och den rör sig i den **positiva**  $x$ -riktningen. Använd 4-rörelsemängdens bevarande för att beräkna deuteriumkärnans massa.
6. Vi vill använda Schwarzschildlösningen för att beräkna hur klockor påverkas av jordens gravitation. Linjeelementet är

$$ds^2 = c^2 (1 - K) dt^2 - (1 - K)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 , \quad (1)$$

där

$$K = \frac{2GM}{c^2 r} . \quad (2)$$

Jordens massa är  $M = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ , och gravitationskonstanten  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

- En observatör står stilla (konstant  $r$ ,  $\theta$  och  $\phi$ ). Härled en ekvation för egentiden  $\tau$  som denna observatör uppmäter som en funktion av  $K$  och koordinattiden  $t$ .
  - Använd denna ekvation för att visa att egentiden som en sådan observatör uppmäter är lika med koordinattiden om observatören står väldigt ( $\approx$  oändligt) långt borta från jorden.
  - För radier  $r$  nära jordytan är  $K$  ett väldigt litet tal. Expandera därför ekvationen för små  $K$  (sätt  $K^2$  och högre potenser till 0).
  - Jordens radie är ungefär 6371 km. En GPS-satellit befinner sig 20 000 km ovanför jordytan. Använd ekvationen från (c) för att beräkna skillnaden i tiden som uppmäts av en person på jordytan,  $\tau_J$ , och tiden som uppmäts av satelliten,  $\tau_S$ , under 5 s koordinattid. OBS: Antag alltså att både personen och satelliten befinner sig på konstant  $r$ ,  $\theta$  och  $\phi$ !
7. FLRW-linjeelementet som beskriver ett expanderande universum (med  $k = 0$ ) är

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) . \quad (3)$$

- Vad är den kosmologiska principen och vad har den att göra med detta linjeelement?
- Härled Hubbles lag  $v = Hd$  från FLRW-linjeelementet. Vad är Hubbleparametern (Hubblekonstanten) som funktion av skalfaktorn  $a(t)$ ?  
(Tips: Du kan anta att en galax befinner sig på  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  och den andra på  $(x, y, z) = (x, 0, 0)$ . Skriv först ner ett uttryck för avståndet  $d$  mellan dessa två galaxer som en funktion av tiden, och ta sedan derivatan av detta avstånd för att beräkna hastigheten  $v$ .)
- Hubbleparameterns värde i nutid är  $H \approx 2 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ . Enligt Hubbles lag, hur långt borta måste en galax vara för att hastigheten den rör sig ifrån oss ska vara lika med ljusets hastighet? Ge svaret i megaparsec ( $1 \text{ Mpc} \approx 3 \times 10^{22} \text{ m}$ ).

# Formelsamling

Ljusets hastighet  $c \approx 3 \times 10^8$  m/s.

**Lorentzfaktorn:**  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$  (4)

**Tidsdilatation:**  $\Delta t' = \gamma \Delta t$  (5)

**Längdkontraktion:**  $L' = \frac{L}{\gamma}$  (6)

**Dopplereffekten för ljus:**  $f_o = \sqrt{\frac{1 \pm u/c}{1 \mp u/c}} f_K$  (7)

{ övre tecknen:  $K$  &  $O$  rör sig mot varandra  
 { undre tecknen:  $K$  &  $O$  rör sig från varandra

**Lorentztransformationen:** 
$$\begin{cases} t' &= \gamma \left( t - \frac{u}{c^2} x \right) \\ x' &= \gamma (x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases}$$
 (8)

**Transformation av hastigheter:** 
$$\begin{cases} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - u v_x / c^2} \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma(1 - u v_x / c^2)} \\ v'_z &= \frac{v_z}{\gamma(1 - u v_x / c^2)} \end{cases}$$
 (9)

**Transformation av en 4-vektor:**  $\mathbf{a}' = \Lambda \mathbf{a}$  med  $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{u}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{u}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (10)

**Rumtidsintervallet:**  $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$  (11)

**4-rörelsemängd:**  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$  med  $\begin{cases} E = \gamma m c^2 \\ p_x = \gamma m v_x \\ p_y = \gamma m v_y \\ p_z = \gamma m v_z \end{cases}$  (12)

**Mer om energi och rörelsemängd:**  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$  och  $|\vec{v}| = \frac{|\vec{p}|}{E} c^2$  (13)

(14)