Matematiska hjälpmedel III - 2023, sluttent

R. Paatelainen

10 mars 2023

Instruktioner:

- Tenttid 4h (kl. 09-13:00).
- Besvara alla fem frågor.
- Gör varje uppgift på ett skilt papper. Skriv ditt namn och studentnummer på VARJE svarspapper.

1. Låt $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vara ett skalärfält $\phi(x, y, z) = y^2 + \sin(x)$ samt $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ett vektorfält $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, xy, e^x + z)$. Beräkna

(a) Skalärfältets ϕ gradient $\nabla\phi$.

(b) Vektorfältets $\vec{F}$ divergens $\nabla \cdot \vec{F}$.

(c) Vektorfältets $\vec{F}$ rotor $\nabla \times \vec{F}$. Är det givna vektorfältet konservativt?

2. Låt kraftfältet vara $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Hur mycket arbete krävs det för att flytta kroppen från origo $(0, 0, 0)$ till punkten $(2, 4, 8)$?

(a) längs en rak linje?

(b) längs kurvan $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$?

Du fick samma svar i (a)- och (b)-delen . Förklara resultatet med hjälp av vektorfältens egenskaper.

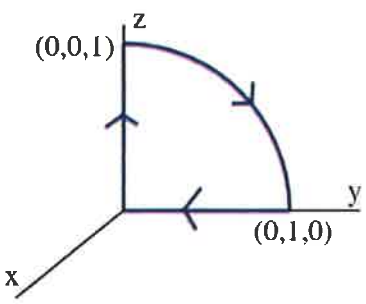
3. Beräkna arean på den delen av ytan $2x + 3y + 6z = 9$ som befinner sig i cylindern $x^2 + y^2 = 7$.

4. Beräkna vektorfältets $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$ flöde uppåt genom den parametriserade ytan

$$\vec{r}(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), u),$$

då $u \in [0, 4]$ samt $v \in [0, \pi]$.

5. Låt C vara den slutna kurvan som syns i bilden



Låt vektorfältet vara $\vec{F} = (y, z, x)$. Beräkna kurvintegralen $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ genom att använda Stokes sats. **Tips**: Det räcker att välja vilken som helst sluten yta S, vars gränslinje ∂S är positivt riktad (alltså gränslinjen samt ytans enhetsnormal $\vec{n}$ bildar ett system där högerhandsregeln gäller).

VÄND!

Formelsamling

Integralen för vektorfältet $\vec{V}(x,y,z)$ längs kurvan C

$$W = \int_C \vec{V}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt ,$$

där parameterrepresentation för kurvan C är $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Vektorfältets $\vec{F}$ flöde genom ytan S kan skrivas som:

$$\int_S (\vec{F} \cdot \vec{n})dS = \int_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)dudv ,$$

var $\vec{r}(u,v)$ är parametriseringen för ytan S och området D är parametrarnas (u,v) definitionsmängd.

Divergenssatsen :

$$\oint_S (\vec{F} \cdot \vec{n})dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{F})dV$$

Stokes sats:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}dS.$$

Polära koordinater:

$$x = r\cos\phi \ , \ y = r\sin\phi \ , \ dxdy = rdrd\phi$$

Sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \\ dxdydz &= r^2\sin\theta drd\theta d\phi \ . \end{aligned}$$

Cylindriska koordinater:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \\ z &= z \\ dxdydz &= \rho d\rho d\phi dz \ . \end{aligned}$$