Matematiska hjälpmedel III - 2022, sluttent

R. Paatelainen

9. Mars, 2022

Instruktioner:

- Tenttid 4h (kl. 09-13:00).
- Besvara alla fem frågor.
- Skriv ditt namn och studentnummer på VARJE svarspapper.

1. Vi betraktar skalärfältet $f(x,y) = x^2 y \cos(xy)$. Bestäm

(a) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)$ och $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y)$ i punkten $(x,y) = (1, \pi/2)$.

(b) Gradienten $\nabla f(x,y)$.

(c) Totala differentialen df i punkten $(x,y) = (1, \pi/2)$.

2. Vi har potentialen $\phi(\vec{r}) = -r^2/2$, där $\vec{r} = (x,y,z)$ och $r = |\vec{r}|$ är $\vec{r}$ vektorns längd (norm).

(a) Räkna kraftfältet $\vec{F} = -\nabla\phi$.

(b) Är $\vec{F}$ konservativt?

(c) Räkna linjeintegralen

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

var C är en rak linje från origo $(0,0,0)$ till punkten $(1,1,1)$.

3. Låt $V \subset R^3$ vara en rak cirkulär cylinder, med bottenradien R och höjden h. Bottnets mittpunkt är i origo och z-axeln fungerar som symmetriaxel. Beräkna massan för V

$$m = \int_V f \; dV,$$

när dens massadensitet funktion är $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4. Beräkna totala laddningen $Q = \int_S \rho \; dS$ på ytan S. Ytan S har parameterrepresentationen

$$\vec{r}(u,v) = e^u \cos(v)\hat{\imath} + e^u \cos(v)\hat{\jmath} + u\hat{k}, \quad \text{kun } u \in [0,1], \; v \in [0,\pi]$$

och laddningsdensiteten $\rho(u,v) = \sqrt{1+e^{2u}}$.

5. Beräkna vektorfältets $\vec{F}(x,y,z) = (4xz, -y^2, yz)$ flöde genom kubens yta S.

$$V = \{(x,y,z) \in R^3 \mid x \in [0,1], \; y \in [0,1] \; z \in [0,1]\}$$

(**Tips**: Divergenssatsen)

VÄND!

Formelsamling

Integralen för vektorfältet $\vec{V}(x,y,z)$ längs kurvan C

$$W = \int_C \vec{V}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \ ,$$

där parameterrepresentation för kurvan C är $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
Vektorfältets $\vec{F}$ flöde genom ytan S kan skrivas som:

$$\int_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dA \ ,$$

var $\vec{r}(u,v)$ är parametriseringen för ytan S och området D är parametrarnas (u,v) definitionsmängd.

Divergenssatsen :

$$\oint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

Stokes sats:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS.$$

Polära koordinater:

$$x = r\cos\phi \ , \ y = r\sin\phi \ , \ dxdy = rdrd\phi$$

Sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \\ dxdydz &= r^2\sin\theta drd\theta d\phi \ . \end{aligned}$$

Cylindriska koordinater:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \\ z &= z \\ dxdydz &= \rho d\rho d\phi dz \ . \end{aligned}$$