Matematiska hjälpmedel II 2019, slutförhör

1. Låt $z_1 = a + ib$ och $z_2 = c + id$, var $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Förenkla följande komplexa talen till formen $x + iy$, var $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) (1 p.) $z_1 - z_2$,

(b) (1 p.) $z_1 z_2$,

(c) (2 p.) $(z_1 + z_2^*)(z_1 - z_2^*)$,

(d) (2 p.) z_1 / z_2^*.

Instruktioner:

- Du får ha med dig bara skrivredskap: penna, gummi, linjal.
- Skriv var uppgifts lösning på **eget konceptpapper**.
- Svara på varje uppgift någonting (så att lösningar inte misstänks ha försvunnit).
- Skriv på varje konceptpapper ditt namn och studerandenummer.
- Märk att uppgifterna fortsätter på andra sidan av provpappret!

2. Vi granskar differentialekvationen

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = b(x). \qquad (*)$$

Motivera, är följande påståelser sanna eller falska:

(a) (2 p.) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$, var $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, är den allmänna lösningen för den homogena ekvationen.

(b) (2 p.) Om $b(x) = e^x + e^{-x}$, så är $y(x) = Dx^2 e^{-x} + Ee^x$ för vissa reella värden av D och E differentialekvationens $(*)$ speciallösning.

(c) (1 p.) Om $b(x) = 2x + 1$, så existerar $A, B \in \mathbb{R}$ så att $y(x) = Ax + B$ är differentialekvationens $(*)$ speciallösning.

(d) (1 p.) Om $b(x) = x^2$, så är $y(x) = x^2 - 4x + 6$ differentialekvationens $(*)$ speciallösning.

I uppgift 5: Som påminnelse: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$

3. Vi undersöker följande linjära första gradens differentialekvation vars koefficienter inte är nödvändigtvis konstanta

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x),$$

var funktionerna $p(x)$ och $q(x)$ antas vara kontinuerliga i ett intervall som innehåller $x = x_0$.

(a) (3 p.) Visa att, ekvationens lösning som uppfyller rätt begynnelsevillkor i punkten $x = x_0$ kan skrivas i formen

$$y(x)e^{I(x)} = \int_{x_0}^{x} dt\, e^{I(t)} q(t) + y(x_0),$$

var $I(x) \equiv \int_{x_0}^{x} dt\, p(t)$.

(b) (3 p.) Lös begynnelsevillkor-problemet

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = 1.$$

I uppgift 3: I b-delen kan du använda a-delens formel oberoende av om du lyckas lösa a-delen. Integralerna som kommer emot borde lösas ganska lätt endera rakt eller med att partiellintegrera: $\int dx f' g = fg - \int dx f g'$.

4. (6 p.) Finn matrisformen till linjäravbildningen F, som avbildar 2-dimenionerliga kolumnvektorerna $(1, 2)$ och $(2, -1)$ enligt följande:

$$F\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. (6 p.) Vi definierar 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisens:

(a) (2 p.) spår och determinant,

(b) (2 p.) egenvärden,

(c) (2 p.) egenvektorer.

I uppgift 5: Som påminnelse:
$\det A = \sum_{ijk\ldots=1}^{n} \epsilon_{ijk\ldots} A_{1i} A_{2j} \ldots$
För 2×2-matriser $\det A = ad - bc$,
$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$
$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$