Kvanttistatistiikan loppukoe 10.5.2022

Vastaa jokaiseen tehtävään omalle arkilleen ja kirjoita nimesi ja opiskelijanumerosi selkeästi kunkin arkin ensimmäiselle sivulle. Kaikki tarvittavat apukaavat on annettu koepaperin kääntöpuolella.

Jos olet oikeutettu lisäaikaan, jätä yksi vapaavalintainen tehtävä tekemättä ja kirjoita maininta lisäajasta sen kohdalle. Valinnassa kannattaa ottaa huomioon, että neljännestä tehtävästä on saatavissa kaksi lisäpistettä, joita ei lasketa kokeen maksimipistemäärään (32).

1. Vastaa lyhyesti seuraaviin kysymyksiin.

   a. Käyttäen hyväksi tietoa miehityslukuoperaattorin $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ odotusarvoista määrittele Fockin avaruuden ns. miehityslukukanta vuorovaikuttamattomalle monihiukkassysteemille. Kirjoita myös systeemin Hamiltonin funktio ja selitä, miten se operoi määrittelemillesi kantatiloille. Voit olettaa yksihiukkasenergiat tunnetuiksi. (2p)

   b. Mitä tarkoitetaan puhtaalla kvanttimekaanisella tilalla ja sekatilalla? Mitä ominaisuuksia tiheysoperaattorilta vaaditaan? (2p)

   c. Kuvaile, mitä identifikaatioita statististen ja termodynaamisten suureiden välillä on tehtävä, jotta monihiukkassysteemin statistinen kuvailu on konsistenttia lämpöopin 1.pääsäännön kanssa. (2p)

   d. Mitä tarkoitetaan tietyn vapausasteen virittymisellä tietyn lämpötilan ympärillä? Anna tästä jokin esimerkki. (2p)

2. Vastaa seuraaviin kysymyksiin hieman monisanaisemmin.

   a. Määrittele kvanttimekaanisen systeemin tilatiheysfunktio $\omega(E)$. Lähtien liikkeelle siitä tiedosta, että $V = L^3$ kokoiseen laatikkoon suljetun vapaan kvanttimekaanisen hiukkasen mahdolliset impulssit saavat muodon $\mathbf{p} = \frac{h}{L}(n_x, n_y, n_z)$, $n_i \in \mathbf{Z}$, osoita, että ei-relativistisen m-massaisen hiukkasen tilatiheys jatkumorajalla on $\omega_1(E) = C_1 V \sqrt{E}$, jossa vakio $C_1 = \frac{2\pi g}{h^3}(2m)^{3/2}$ ja g (yleensä spiniin liittyvä) degeneraatiotekijä. (2p)

   b. Aloittaen Bose-Einstein-miehityslukufunktion muodosta sekä klassisesta tuloksesta

   $$N = g\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} V e^{\beta\mu} T^{3/2}$$

   selitä, milloin bosonisen monihiukkassysteemin ominaisuudet palautuvat klassisiksi. (3p)

   c. Lähtien liikkeelle partitiofunktion määritelmästä suurkanonisessa jakaumassa johda tulos $\Omega(T, V, \mu) = \pm T \sum_l \ln\left\{1 \mp e^{-\beta(\epsilon_l - \mu)}\right\}$ suurelle potentiaalille vuorovaikuttamattomassa bosonisessa ja fermionisessa monihiukkassysteemissä. (3p)

3. Tarkastellaan vuorovaikuttamatonta systeemiä, joka koostuu parillisesta määrästä N spin-1/2 hiukkasia, jotka on kiinnitetty kiinteisiin hilapisteisiin. Merkitsemällä hiukkasen i spinin z-komponenttia muuttujalla $s_{i,z} = \pm\hbar/2$ systeemin kokonaisspin z-suuntaan saa muodon $S_z = \sum_i s_{i,z} = m\hbar$, $m = 0, \pm1, \pm2, ..., \pm N/2$. Jos systeemi on kytketty ulkoiseen z-suuntaiseen magneettikenttään, $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$, voidaan sen kokonaisenergia lukea tällöin kaavasta

   $$E(m) = -\mu_0 H\gamma \sum_i s_{i,z} = -\underbrace{(\mu_0\gamma\hbar H)}_{\epsilon} m \equiv -m\epsilon\,,$$

   missä μ_0 vastaa tyhjiön permittiivisyyttä sekä γ magnetogyyristä suhdetta. Määritä tälle systeemille ison N:n rajalla

a. tilatiheys $\omega(E)$, (3p)

b. mikrokanoninen entropia $S(E)$, (2p)

c. kokonaisenergia lämpötilan funktiona. (3p)

4. Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

   a. Kuvaile ilman laskuja, kuinka bosekondensaatiota läpikäyvä systeemi käyttäytyy, kun sitä puristetaan rajatta kokoon vakiolämpötilassa. Selitä, mistä käytös johtuu ja hahmottele systeemin faasidiagramman muoto pV-tasossa vakiolämpötilan käyriä käyttäen. (4p)

   b. Osoita, että hieman kriittistä lämpötilaa T_c korkeammilla lämpötiloilla ideaalisen bosekaasun kemiallista potentiaalia voi approksimoida kaavalla (4p)

$$\mu \approx -\left[\frac{\zeta(3/2)}{2\sqrt{\pi}}\right]^2 T_c \left[\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} - 1\right]^2 .$$

   Vihje: seuraavasta integraalista, jossa ϵ on pieni positiivinen reaaliluku, voi olla hyötyä:

$$\int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1 + \epsilon} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta(3/2) - \pi\sqrt{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon) .$$

   c. Bonus: Johda tehtävän b-kohdassa annettu integraalikaava. (2 lisäpistettä)

   Vihje: Yksi tapa ekspandoida tällaista integraalia pienen ϵ:n rajalla on jakaa integroimisalue kahteen osaan $[0, \delta]$ ja $[\delta, \infty]$, missä $0 < \epsilon \ll \delta \ll 1$. Ensimmäisellä välillä voit käyttää hyväksi sitä, että $x \ll 1$ kaikkialla, ja jälkimmäisellä taas sitä, että integrandia voi tässä alueessa ekspandoida ϵ:n potenssisarjana.

Mahdollisesti hyödyllisiä kaavoja

$$\begin{aligned}
\delta U &= T\delta S - \delta W , \\
F_i &\equiv -\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i} \rangle , \\
\lambda_T &\equiv \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m T}} , \\
p\,(N/V)^{5/3}|_{T=T_c} &= \frac{h^2}{2\pi m T}\frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)^{5/3}} , \\
F &= -\frac{VT}{\lambda_T^3} g_{5/2}(1) , \\
\ln N! &\approx N \ln N - N , \\
\beta &= \frac{\partial S}{\partial E} , \\
Z_G &= \mathrm{Tr}\, e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} , \\
\Gamma(x) &\equiv \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{x-1} e^{-t} , \\
\zeta(x) &\equiv \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x} , \\
\int \mathrm{d}x \frac{\sqrt{x}}{x+\epsilon} &= 2\sqrt{x} - 2\sqrt{\epsilon}\arctan(\sqrt{x/\epsilon}) .
\end{aligned}$$