Fys. matem. menet. IIb **Loppukoe** **8.5.2018**

Tee jokainen tehtävä eri paperille sekä kirjoita jokaiseen paperiin nimesi, opiskelijanumerosi, kurssin nimi ja päivämäärä.

1. Etsi funktionaalin

$$J[y] = \int_0^\infty dx\,\left[(y')^4 + 2y(y')^3\right]\frac{e^{2x}}{2}$$

reunaehdot $y(0) = 0$, $y(\infty) = 1$ toteuttavat stationaariset käyrät ja tutki Legendren ehdon avulla voiko kyseessä olla maksimi tai minimi.

2. Tarkastellaan seuraavaa Sturm-Liouville (SL) -ongelmaa

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0\ , \tag{1}$$

reunaehdoilla $y(1) = 0 = y'(b)$, missä reaaliparametri $b > 1$.

(a) Etsi kaikki ominaisarvot λ ja niitä vastaavat ominaisfunktiot $y_\lambda(x)$. *Vinkki:* muuttujanvaihdosta $x = e^z$ saattaa olla apua.

(b) Muunna yhtälö (1) standardiin SL-muotoon:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)y'(x)\right) + \left(-q(x) + \lambda w(x)\right)y(x) = 0\ .$$

Onko kyseessä säännöllinen vai singulaarinen SL-ongelma? Perustele.

(c) Kirjoita SL-teorian yleinen ortogonaalisuusehto. Sovella sitä (a)-kohdan ominaisfunktioille.

(d) Määrää normalisointi s.e. ominaisfunktiot ovat ortonormaaleja.

(e) Esitä vakiofunktio $f(x) = 1$ ominaisfunktioiden sarjana.

(f) Tarkastele (e)-kohdan sarjan konvergenssia. Kiinnitä $x = \sqrt{b}$ laskeaksesi ääretön summa:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \ldots$$

3. Tarkastellaan suljetulla reaaliakselin välillä $[0,1]$ olevia jatkuvia reaalifunktioita. Määritellään seuraava kuvaus

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 dx\, f(x)g(x)\ . \tag{2}$$

(a) Osoita, että (2) määrittelee sisätulon.

(b) Käytä sisätuloa (2) konstruoidaksesi ortonormaali kanta avaruuteen $\mathcal{P}_1[0,1]$, ts. jatkuvien ensimmäisen asteen polynomien avaruuteen.

(c) Etsi se polynomi $h \in \mathcal{P}_1[0,1]$ joka on paras approksimaatio funktiolle $f(x) = x^2$ sisätulon (2) määräämän normin mielessä.

Vinkki: Kuvaus $\langle|\rangle : V \times V \to \mathbb{R}, (u,v) \mapsto \langle u|v\rangle$ on vektoriavaruuden V sisätulo, jos kaikilla $u, v, w \in V$ ja $a \in \mathbb{C}$

Jatkuu kääntöpuolella

(i) $\langle u|u\rangle \in \mathbb{R}$ ja $\langle u|u\rangle \geq 0$

(ii) $\langle u|u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$

(iii) $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$

(iv) $\langle u|v+w\rangle = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle$

(v) $\langle u|av\rangle = a\,\langle u|v\rangle$

missä 0_V on vektoriavaruuden V nollavektori.

4. Olkoon $\{e_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ separoituvan Hilbertin avaruuden H ortonormitettu kanta. Määritellään operaattorit U ja P_1 seuraavasti:

$$U e_n = e_{n+1}\ ,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$P_1 e_1 = e_1\ ,\ P_1 e_n = 0_H\ ,\ n = 2, 3, \ldots$$

missä 0_H on Hilbertin avaruuden nollavektori.

(a) Osoita että U on rajoitettu ja laske normi $||U||$.

(b) Osoita että P_1 on projektio-operaattori.

(c) Määrää adjungoitu operaattori $U^\dagger$.

(d) Laske $U^\dagger U$ ja $UU^\dagger$.

(e) Onko U isometrinen?

(f) Onko U unitaarinen?