Fys. matem. menet. IIa **Loppukoe** **7.3.2018**

Kirjoita jokaiseen paperiin nimesi, opiskelijanumerosi, kurssin nimi ja päivämäärä

1. Etsi yhtälön
$$\partial_t u(t,x) + 4\partial_x u(t,x) = 0$$
yleinen ratkaisu. Etsi sen jälkeen myös se yksikäsitteinen ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon
$$u(0,x) = \frac{1}{1+x^2} \; .$$

2. Lämpötilan jakauma $T(t,\mathbf{x})$ homogeenisessa aineessa, jossa ei ole lämmön lähteitä, toteuttaa diffuusioyhtälön
$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T \; ,$$
kun $D = k/C\rho$, missä k on aineen lämmönjohtavuuskerroin, C on aineen ominaislämpö ja ρ on aineen tiheys.

   Ratkaise särmiön $\{x,y,z \mid 0 \le x \le a \,,\; 0 \le y \le b \,,\; 0 \le z \le c\,\}$ lämpötilajakauma ajalle $t > 0$, kun se hetkellä $t = 0$ oli annettu funktio $\tau(x,y,z)$, ja kun särmiön ulkopinnat pidetään nollalämpötilassa ($T = 0$).

   Vihje: käytä muuttujien erottelua. Seuraavista trigonometristen funktioiden ortogonaalisuusintegraaleista saattaa olla hyötyä:
$$\int_0^L \mathrm{d}x \, \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{L}x\right) = \frac{L}{2}\delta_{m,n},$$
$$\int_0^L \mathrm{d}x \, \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) = \frac{L}{2}\delta_{m,n}, \qquad m,n \ge 1$$
$$\int_0^L \mathrm{d}x \, \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}x\right) = 0,$$

3. Funktio f toteuttaa konfluentin hypergeometrisen yhtälön
$$z\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} + (c - z)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} - af = 0,$$
missä $a, c \in \mathbb{C}$ ja $c \neq 1$. Mitkä ovat yhtälön erikoispisteet? Käyttäen sarjaratkaisumenetelmää, löydä yhtälön yleinen ratkaisu pisteen $z = 0$ ympäristössä.

4. Tiedetään, että Besselin funktioiden J_n, missä $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, generoiva funktio on $\exp[\frac{1}{2}z(t - \frac{1}{t})]$, ts
$$\exp\left[\frac{1}{2}z\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z).$$
Johda tästä tiedosta Besselin funktioille palautuskaavat
$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z)$$
$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}J_n(z),$$
kun indeksi n on kokonaisluku.