Fysiikan matemaattiset menetelmät Ib, FYS2011 Tentti 19.12.2019

Muista merkitä jokaiseen paperiin nimen lisäksi opiskelijanumero. Tehtävät tarkastetaan erikseen, joten tee jokaisen tehtävän vastaus **omalle konseptiarkilleen.**

1. Laske integraalit

$$a)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{(x^2+m^2)^b}\,dx\ , \qquad b)\ \int_0^1 \frac{x^b}{(1-x)^{2+b}}\exp\left(\frac{x}{x-1}\right)dx$$

Eulerin Γ- ja β-funktioiden avulla. Tässä $2b > 5$ ja $m \in \mathbb{R}_+$.

2. Laske funktion $\cos ax$, $a > 0$, Fourier'n sarja välillä $[-\pi, \pi]$, missä a ei ole kokokaisluku.

(Vinkki: $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$.)

3. a) Laske funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1-\frac{1}{2}|x|\,, & \text{kun } 0 \le |x| \le 2\,, \\ 0\,, & \text{kun } |x| > 2 \end{cases}$$

Fourier'n muunnos.

b) Laske Parsevalin kaavan avulla integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt.$$

(Vinkki: $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.)

4. Käyttäen satulapisteapproksimaatiota (Laplacen metodia), johda Stirlingin approksimaatio kertomafunktiolle:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

5. Ratkaise Laplacen muunnosta käyttäen differentiaaliyhtälö

$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0\,, \qquad x(0) = -1, \quad x'(0) = 7$$

ja näytä, että tulos on

$$x(t) = e^t(4\sin 2t - \cos 2t).$$