

Muista merkitä jokaiseen paperiin nimen lisäksi opiskelijanumero. Tehtävät tarkastetaan erikseen, joten tee jokaisen tehtävän vastaus **omalle konseptiarkilleen**.

Tehtävä 1

Laske integraalit

$$a) \int_0^1 x^k \ln x \, dx \quad , \quad b) \int_0^{\infty} \frac{x^a dx}{(1+x^m)^b}$$

Eulerin Γ -funktion avulla. Tässä $k > -1$, $a, b > 0$ ja $m > 1$. Mikä lisäehto tarvitaan jälkimmäisen integraalin suppenemiseen?

Tehtävä 2

Kirjoita Parsevalin kaava funktiolle $f(x) = x$ välillä $-\pi < x < \pi$ ja laske sen avulla sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ summa.

Tehtävä 3

Määritä differentiaaliyhtälön

$$y''(x) - 4y(x) = f(x)$$

yleinen ratkaisu Fourier'n sarjan avulla, kun $f(x)$ on 2π -jaksollinen funktio, joka välillä $[0, 2\pi]$ on

$$f(x) = x - 2\pi .$$

Tehtävä 4

Laske deltajonon

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2n} \\ n & -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 0 & \frac{1}{2n} < x \end{cases}$$

Fourier'n muunnos ja sen raja-arvo, kun $n \rightarrow \infty$.

Tehtävä 5

Ratkaise Laplacen muunnosta käyttäen differentiaaliyhtälö

$$x'' - x = t^2, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0 .$$